



КРОС РТС - КАМП „СОМБОР 2019“

ЛЕТЊА ШКОЛА
МЛАДИХ МАТЕМАТИЧАРА
„СОМБОР 2019“

СОМБОР,
01. – 05. 07. 2019.

САДРЖАЈ:

1. Увод	1
2. Учесници	2
3. Реализатори	4
4. Радионице	5
5. Наставни материјал	6



1. УВОД

Крос РТС је спортско-образовна манифестација која се у Србији и иностранству реализује од 1991. године. Поред атлетских такмичења која су најважнији део једногодишњег циклуса Кроса РТС, важан део програма манифестације је и Камп који се за учеснике Кроса РТС у дијаспори реализује почетком сваког лета.

Ове године Камп је организован у Сомбору уз учешће преко 120 учесника и са разноврсним спортским, образовним, културно-забавним и рекреативним програмом.

Идеју, чији је аутор новинар Стеван Ковачевић – велики активиста и ентузијаста без чије енергије сигурно не би постојао Крос РТС, да се у програм Кампа уврсте и извесни математички садржаји, Друштво математичара Србије је прихватило са радошћу и одговорношћу да програм кампа обогати занимљивим математичким садржајима, али и да учини и корак више организацијом Летње школе младих математичара за ученике старијих разреда сомборских основних школа.

Редови који следе су запис о томе шта смо и како радили и, верујемо, користан материјал за сличне подухвате и у другим приликама и срединама.

Користим прилику да се у име Друштва математичара Србије искрено захвалим РТС на позиву да се укључимо у програм Кампа, граду Сомбору на великом гостопримству, али и Стевану Ковачевићу – директору Кампа, Бори Станичко-ву – начелнику Школске управе Сомбор, др Гордани Степић – реализатору образовних програма, Маји Секулић – директорки ОШ „Аврам Мразовић“, др Соњи Чукић – професорки Математичке гимназије у Београду, љубазном особљу Дома ученика у Сомбору и многим другим драгим колегиницама и колегама на помоћи који су учинили да се у Кампу осећамо пријатно и корисно.

Истовремено се захваљујем Милени, Зои, Елени и Војину - ученицима Математичке гимназије у Београду који су имали храбрости, ентузијазма и знања да се ухвате у коштац са реализацијом захтевног програма Летње школе младих математичара Сомбор 2019.

др Војислав Андрић
председник
Друштва математичара Србије

2. УЧЕСНИЦИ ЛЕТЊЕ ШКОЛЕ МЛАДИХ МАТЕМАТИЧАРА СОМБОР 2019.

5. РАЗРЕД

- 1) Јован Сузић, ОШ „Братство јединство“
- 2) Вељко Иђушки, ОШ „Аврам Мразовић“
- 3) Милан Јосић, ОШ „Иво Лола Рибар“
- 4) Бојан Манојловић, ОШ „Иво Лола Рибар“
- 5) Јаков Нешић, ОШ „Иво Лола Рибар“
- 6) Василије Терзић, ОШ „Иво Лола Рибар“
- 7) Владимир Цвејин, ОШ „Никола Вукићевић“

6. РАЗРЕД

- 8) Анабела Горановић, ОШ „Иво Лола Рибар“
- 9) Немања Тепавац, ОШ „Иво Лола Рибар“
- 10) Вања Перишић, ОШ „Никола Вукићевић“
- 11) Тијана Добрић, ОШ „Доситеј Обрадовић“
- 12) Стеван Секулић, ОШ „Доситеј Обрадовић“
- 13) Стефан Мишковић, ОШ „Братство јединство“
- 14) Рената Ђанић, ОШ „22. октобар“
- 15) Ива Винков, ОШ „22. октобар“
- 16) Сава Марјановић, ОШ „Аврам Мразовић“

7. РАЗРЕД

- 17) Немања Мајски, ОШ „Доситеј Обрадовић“
- 18) Јелена Канурић, ОШ „Аврам Мразовић“
- 19) Ирина Секулић, ОШ „Аврам Мразовић“
- 20) Михаил Ибишић, ОШ „22. октобар“
- 21) Немања Нишевић, ОШ „Никола Вукићевић“
- 22) Тијана Арнаут, ОШ „Иво Лола Рибар“

- 23) Милош Пешут, ОШ „Иво Лола Рибар“
- 24) Александар Губица, ОШ „Доситеј Обрадовић“
- 25) Сања Лукић, ОШ „Аврам Мразовић“
- 26) Николина Иђушки, ОШ „Аврам Мразовић“

8. РАЗРЕД

- 27) Петар Марковић, ОШ „Иво Лола Рибар“
- 28) Ведран Бајић, ОШ „Иво Лола Рибар“
- 29) Лазар Зубовић, ОШ „Иво Лола Рибар“
- 30) Дарко Нађ, ОШ „Никола Вукићевић“
- 31) Анастасија Рус, ОШ „Никола Вукићевић“



3. РЕАЛИЗАТОРИ ЛЕТЊЕ ШКОЛЕ МЛАДИХ МАТЕМАТИЧАРА СОМБОР 2019.

- 1) Зои Бизетић – ученица 3. разреда Математичке гимназије у Београду
- 2) Милена Петровић - ученица 3. разреда Математичке гимназије у Београду
- 3) Елена Сладојевић - ученица 3. разреда Математичке гимназије у Београду
- 4) Војин Лукић - ученик 3. разреда Математичке гимназије у Београду
- 5) Лука Будисављевић – ученик 1. разреда Спортске гимназије у Београду
- 6) др Војислав Петровић – редовни професор ПМФ-а у Новом Саду
- 7) др Војислав Андрић – председник Друштва математичара Србије



4. РАДИОНИЦЕ

1. 01. 07. 2019. – др Војислав Андрић: Судоку

1.

			1
1	3		
3	1		
2	4		3

2.

	1	4	
3			1
	2	3	4
	3		

3.

2	1		
	4	2	
	3	1	
		3	4

4.

3	4	1	2
4	2	3	1

5.

3		6		4	
	1	4	6		
6	3	5	4		
			3		5
4		1		3	6
			2	1	4

6.

	5	3			
2		4		6	
1	4			3	5
	6	5	4	2	
			2		
	2	1	3	5	6

7.

1		2	6	4	
	4	5		1	
2	1		4	5	6
	6	4			
3					4
	5	6		3	

8.

		4	6		8	5		
					7	6	2	9
6				2	5	8	4	7
	9	3	7		2		6	5
	7	5					8	
2	6	8			4			3
		6	8		9	7		2
	8			3		4		6
		2		7		3	5	8

9.

	2			4	6	7	8	
4								3
							5	6
			3					
	9			8	7	2		
3							4	
9				1	2			
	4	1	9	5				
	6							

2. 01. 07. 2019. – др Војислав Петровић: Шаховска радионица – мат у два потеза

3. 02. 07. 2019. – др Војислав Андрић: Традиционална логичка игра „Мица“

4. 02. 07. 2019. – Лука Будисављевић: Неки интересантни шаховски проблеми

5. 03. 07. 2019. – др Војислав Андрић: Турнир „Мица“

5. НАСТАВНИ МАТЕРИЈАЛ



КРОС РТС - КАМП „СОМБОР 2019“
ЛЕТЊА ШКОЛА МЛАДИХ МАТЕМАТИЧАРА
СОМБОР, 01.– 05. 07. 2019.



ПОНЕДЕЉАК 01.07.2019.

ДР ВОЈИСЛАВ АНДРИЋ И САРАДНИЦИ:

МАТЕМАТИЧКА РАДИОНИЦА 1.

НЕКИ ИНТЕРЕСАНТНИ ПРОБЛЕМИ ИЗ ИСТОРИЈЕ МАТЕМАТИКЕ

- Како је Гаус сабрао првих сто природних бројева?
- Колико зрнаца жита је тражио проналазач шаха?
- Талес и Кеопсова пирамида;
- Класични нерешиви математички проблеми: Трисекција угла, Квадратура круга и Удвајање коцке
- Неки (још увек) нерешени математички проблеми: Голбахова хипотеза, Да ли је простих бројева близанаца коначно или бесконачно много?



5. РАЗРЕД – УТОРАК 02. 07. 2019.

ЕЛЕНА СЛАДОЈЕВИЋ:
СУДОКУ И ДРУГЕ ИГРЕ

1.

3		6		4	
	1	4	6		
6	3	5	4		
			3		5
4		1		3	6
			2	1	4

2.

	5	3			
2		4		6	
1	4			3	5
	6	5	4	2	
			2		
	2	1	3	5	6

3.

1		2	6	4	
	4	5		1	
2	1		4	5	6
	6	4			
3					4
	5	6		3	

4.

		4	6		8	5		
					7	6	2	9
6				2	5	8	4	7
	9	3	7		2		6	5
	7	5					8	
2	6	8			4			3
		6	8		9	7		2
	8			3		4		6
		2		7		3	5	8

5.

	9		2		7		6	
7				5				8
			8		3			
6		4				9		1
	7						2	
2		9				5		7
			6		4			
3				8				6
	8		5		1		7	

6.

	2			4	6	7	8	
4								3
							5	6
			3					
	9			8	7	2		
3								4
9				1	2			
	4	1	9	5				
	6							

ДОМАЋИ ЗАДАТАК

1)

[illegible]

2)

[illegible]



КРОС РТС - КАМП „СОМБОР 2019“
ЛЕТЊА ШКОЛА МЛАДИХ МАТЕМАТИЧАРА
СОМБОР, 01. – 05. 07. 2019.



6. РАЗРЕД – УТОРАК 02.07.2019.

ЗОИ БИЗЕТИЋ: ДИРИХЛЕОВ ПРИНЦИП

1. Ако 11 зечева треба сместити у 5 кавеза, онда постоји кавез у коме има бар 3 зеца. Доказати.
2. Доказати да међу 5 природних бројева постоји бар 3 броја исте парности.
3. Да ли је могуће да у школи са 370 ученика постоје два која славе рођендан истог дана?
4. Може ли у одељењу да постоје бар два ученика чија презимена почињу истим словом: а) ако одељење има 34 ученика; б) ако одељење има 30 ученика.
5. Школа има 1000 ученика. Доказати да међу њима постоје два ученика који имају исте иницијале.
6. Доказати да међу произвољних 841 природних бројева постоји бар 211 који дају исти остатак при дељењу са 4.
7. Доказати да међу 6 целих бројева постоје два чија је разлика дељива са 5.
8. У кутији се налазе лоптице исте величине и то: 10 црвених, 8 плавих и 4 жуте. Из кутије не гледајући извлачимо лоптице. Колико најмање лоптица морамо извући да бисмо били сигурни да међу њима: а) не мање од 4 лоптице исте боје? б) бар по једна лоптица сваке боје? в) не мање од 6 плавих лоптица?
9. Све тачке равни обојене су жуто или зелено. Доказати да у равни постоји дуж чија је дужина 1 cm и чије крајње тачке су исте боје.
10. У унутрашности једнакостраничног троугла странице 2cm на случајан начин је учено 5 (различитих) тачака. Доказати да при ма каквом распореду тачака увек постоје две чије је растојање мање од 1cm.
11. Неспретни ученик је мастилом испрљао папир димензија 21x30 cm. Површина флека је 314 cm^2 . Доказати да постоје две тачке које су неумазане и које су осносиметричне у односу на осу симетрије правоугаоника.
12. На првенству школе учествује 10 екипа. Сваке две екипе морају да играју утакмицу. Доказати да у сваком тренутку постоје две екипе које су до тог тренутка одиграле исти број утакмица.

ДОМАЋИ ЗАДАТАК

- 1) Доказати да међу 1999 природних бројева постоји бар 1000 исте парности.
- 2) У кутији се налази 10 црвених и 5 плавих оловки. Колико најмање оловки треба да узмемо тако да будемо сигурни да имамо бар 6 црвених оловки?
- 3) Дато је 999 простих бројева. Доказати да се међу њима бар 250 завршава истом цифром. Да ли тврђење важи и за 998 простих бројева?
- 4) Колико ученика минимално има рођендан на исти дан, ако школа има 1100 ученика?



КРОС РТС - КАМП „СОМБОР 2019“
ЛЕТЊА ШКОЛА МЛАДИХ МАТЕМАТИЧАРА
СОМБОР, 01. – 05. 07. 2019.



7. РАЗРЕД – УТОРАК 02. 07. 2019.

ВОЈИН ЛУКИЋ:

РЕШАВАЊЕ ПРОБЛЕМА КОРИШЋЕЊЕМ ПОСЛЕДЊЕ ЦИФРЕ

1. Којим цифрама се завршавају природни бројеви који су дељиви са 5?
2. Којим цифрама се завршавају квадрати природних бројева?
3. Постоје ли природни бројеви x и y такви да је $x^2 + 5y = 98\,765\,432$?
4. Којим цифрама се завршава производ два узастопна природна броја?
5. Постоје ли природни бројеви n и k такви да је $1 + 2 + \dots + (n - 1) + n = 444\dots444$ (цифра 4 има k) ?
6. Ако је k природан број, којим цифрама се завршавају бројеви $2^k, 3^k, 4^k, 5^k, 6^k, 7^k, 8^k$ и 9^k ?
7. Одреди најмањи природан број n такав да израз $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ није дељив са 5.
8. Докажи да је број $m = 6^{555} + 7^{555} + 8^{555} + 9^{555}$ дељив са 10.
9. Да ли једначина $9^n + 11^n = 4^n$ има решење у скупу природних бројева.
10. За које вредности природног броја n је израз $7^n - 1$ дељив са 10?
11. Докажи да једначина $x^4 + y^4 = 888\,888\,888$ нема решења у скупу целих бројева.
12. Производ првих n узастопних природних бројева, тј. број $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n - 1) \cdot n$ називамо „ен факторијел“ и обележавамо са $n!$. Израчунај $1!, 2!, 3!, 4!, 5!$ и $6!$.
13. Којим цифрама се завршава $n!$, ако је n природан број?
14. Одреди природне бројеве x и y такве да је $5x + y! = 2019$.
15. Колико решења у скупу природних бројева има једначине $1! + \dots + x! = y^2$?

ДОМАЋИ ЗАДАТАК

- 1) Да ли је број $m = 1^{2019} + 2^{2019} + 3^{2019} + 4^{2019}$ дељив са 10?
- 2) Постоји ли конвексан многоугао који има 222 222 222 дијагонала?
- 3) Докажи да једначина $x^4 + y^4 = 888\,888\,888$ нема решења у скупу целих бројева.
- 4) Постоје ли природни бројеви n и k такви да је $5^n + 6^n + 7^n + 8^n = 10^k$?
- 5) Ако су x и y природни бројеви, онда једначина $x! + y! = 201920192019$ нема решења. Докажи.

8. РАЗРЕД – УТОРАК 02. 07. 2019.
МИЛЕНА ПЕТРОВИЋ: НЕЈЕДНАКОСТИ

1. Доказати да важи $a^2 + b^2 \geq 2ab$.
2. Ако су a и b позитивни реални бројеви, онда је $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$. Доказати
3. Доказати $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \leq -2$, ако су бројеви супротног знака.
4. Ако је x реалан број, онда је $1 + x + x^2 > 0$. Доказати
5. Доказати $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}$, $a, b, c > 0$, $a < b$.
6. Ако је $x > 0$, доказати да важи $x + \frac{1}{x} \geq 2$. Када важи једнакост?
7. Ако су $a, b, c > 0$, доказати да важи $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$.
8. Ако реални позитивни бројеве задовољавају услов $a + b + c = 1$, доказати да важи $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}$. (Упутство: користити прошли задатак).
9. Коришћењем претходно доказаних неједнакости доказати да за позитивне бројеве a, b, c важи $ab(a+b) + bc(b+c) + ac(a+c) \geq 6abc$
10. Доказати релацију између аритметичке и геометријске средине два броја

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}, \quad a, b > 0$$

* Напомена! Неједнакост између аритметичке и геометријске средине важи и за више бројева, тј. $\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$, $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$
11. Користећи претходно доказану неједнакост, доказати да за позитивне реалне бројеве a, b и c важи неједнакост $(a+b)(b+c)(a+c) \geq 8abc$.
12. Доказати да важи $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) \geq 9abc$, за позитивне реалне бројеве.

ДОМАЋИ ЗАДАТАК

- 1) Ако је $a < b$, доказати да важи $a < \frac{a+b}{2} < b$.
- 2) Доказати да важи неједнакост $a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b$.
- 3) За позитивне реалне бројеве доказати да важи $(a+2)(b+2)(a+b) \geq 16ab$.
- 4) Доказати $(a_1+1)(a_2+1)\dots(a_n+1) \geq 2^n$, ако важи $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$, $a_1 a_2 \dots a_n = 1$,
- 5) Доказати да важи $(a+b+c)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}) \geq 9$, за позитивне реалне бројеве.



КРОС РТС - КАМП „СОМБОР 2019“
ЛЕТЊА ШКОЛА МЛАДИХ МАТЕМАТИЧАРА
СОМБОР, 01. – 05. 07. 2019.



5. РАЗРЕД – СРЕДА 03.07.2019.

ВОЈИН ЛУКИЋ: ДЕЉИВОСТ И ПРОСТИ БРОЈЕВИ

1. Који од следећих природних бројева 12435423, 23432534, 34235, 243540, 840, 32934 су дељиви са: а) 2 б) 3 в) 5 г) 6 д) 4 ђ) 9.
2. Одредити вредност цифре $*$ тако да број $27*5$ буде дељив са 3.
3. Одредити цифре a и b тако да број $25a7b6$ буде дељив са 6.
4. Колико има природних бројева мањих од 1000 који су дељиви са 2, а нису дељиви са 5?
5. Одредити све четвороцифрене природне бројеве чије су цифре јединица и хиљада једнаке 8 и дељиви су са 4 и 9.
6. НЗД и НЗС. Одредити НЗД (12, 15) и НЗС (21, 15, 5).
7. Колико делилаца има број 30?
8. Одреди три узастопна природна броја чији је производ 4080.
9. Одредити најмањи природни број који при дељењу са 8, 12, 16 даје остатак 5.
10. Ако је p прост број доказати да је $p + 7$ сложен број.
11. Број x има више од 20, а мање од 30 цифара, и све његове цифре су 2. Одредити број x , ако је познато да је дељив са 7.
12. Одредити број $\overline{abba}$ тако да важи: $\overline{ab} - \overline{ba} = 3a + 3b$.
13. Бројеви 13 и 31 су прости. Одреди све двоцифрене просте бројеве такве да се када цифре замене места опет добије прост број.
14. Да ли је више простих или сложених троцифрених бројева?
15. Одредити просте бројеве p и q такве да је: а) $p + q = 99$; б) $p + q = 36$.
16. Одреди по један прост и један сложен број, такве да су: а) њихов збир и разлика прости бројеви; б) њихов збир и разлика сложени бројеви; в) њихов збир прост, а разлика сложен број; г) збир сложен, а разлика прост број.

ДОМАЋИ ЗАДАТАК

- 1) Одредити најмањи природан број којим би требало поделити бројеве 1901, 2892 и 1723 тако да се добију редом остаци 11, 12, 13?
- 2) Одредити све природне бројеве друге стотине који су 13 пута већи од збира својих цифара.
- 3) Колико делилаца има број 2019?
- 4) Доказати да не постоје прости бројеви p и q такви да је $p + q = 777$.



КРОС РТС - КАМП „СОМБОР 2019“
ЛЕТЊА ШКОЛА МЛАДИХ МАТЕМАТИЧАРА
СОМБОР, 01. – 05. 07. 2019.



6. РАЗРЕД – СРЕДА 03.07.2019.

МИЛЕНА ПЕТРОВИЋ: КОМБИНАТОРИКА

1. Од Сомбора до Новог Сада воде четири пута, а од Новог Сада до Београда три пута. На колико начна се може из Сомбора стићи у Београд, преко Новог Сада?
2. Колико има четвороцифрених бројева чија је прва цифра паран број, друга цифра прост број, трећа непаран број, а четврта сложен број?
3. На колико начина Ана, Бранка и Влада могу да стану у врсту? Колико има начина ако им се придружи и Горан?
4. Колико има троцифрених бројева који нису дељиви ни са 2, ни са 3, ни са 5?
5. Колико има шестоцифрених природних бројева у чијем се запису користе само цифре 1, 3, 4, 5, 7, 9, ако се цифре: а) могу понављати; б) не могу понављати?
6. Колико има четвороцифрених природних бројева у чијем се запису користе само цифре 0, 3, 4, 5, 7, 9, ако се цифре: а) могу понављати; б) не могу понављати?
7. Колико има природних бројева мањих од 2009 чији је производ цифара 42?
8. Колико има петоцифрених бројева чији је производ цифара паран?
9. На старту трке је шест такмичара. На колико начина се могу: а) поделити златна, бронзана и сребрна медаља? б) изабрати три тркача за финалну трку, при чему редослед није битан?
10. Колико има природних бројева који су делиоци броја 2016?
11. Дато је девет тачака на кружници, колико дате тачке одређују: а) различитих дужи; б) различитих троуглова?
12. Колико има четвороцифрених бројева чији је збир цифара непаран?
13. Колико има шестоцифрених природних бројева написаних помоћу цифара 5, 6, 7, 8, 9 и 0 чије се цифре не могу понављати, а код којих су цифре 7 и 8 суседне?
14. Бака има десет унучади и сви имају различит број година. Алиса је најстарија. Ако је збир година свих унучади 180, колико најмање Алиса може имати година?
15. На турниру у тенису учествује 2019 тенисера. Такмичење се игра по куп систему, тј. тако да после сваког меча победник иде даље, а поражени испада. Колико треба одиграти мечева да би се добио победник турнира?

ДОМАЋИ ЗАДАТАК

- 1) Колико има шестоцифрних природних бројева у чијем се запису користе само цифре 0, 3, 4, 5, 7, 9?
- 2) Колико има троцифрених бројева у којима ниједна цифра није нула, а производ цифара је дељив са 15?
- 3) На једној прослави свих 20 учесника руковало се међусобно. Колико је било руковања укупно?





КРОС РТС - КАМП „СОМБОР 2019“
ЛЕТЊА ШКОЛА МЛАДИХ МАТЕМАТИЧАРА
СОМБОР, 01. – 05. 07. 2019.



7. РАЗРЕД – СРЕДА 03.07.2019.

ЕЛЕНА СЛАДОЈЕВИЋ: КРУГ

1. Тангентне дужи конструисане из исте тачке ван дате кружнице су међусобно једнаке. Доказати.
2. Нека је k кружница са центром у тачки O . Нека је AB једна тетива те кружнице таква да је $\angle AOB = 130^\circ$. Ако је C нека тачка на кружници, тако да су C и O са исте стране тетиве AB , израчунати $\angle ACB$.
3. Нека је k кружница са центром у тачки O . Нека је AB једна тетива те кружнице и тачка C било која тачка на кружници, тако да су C и O са исте стране тетиве AB . Доказати да је $\angle AOB = 2 \angle ACB$.
4. Нека је k кружница са центром у тачки O , нека је AB једна њена тетива и нека су C и D тачке на кружници са исте стране тачке O . Ако је $\angle ACB = 64^\circ$, израчунати $\angle ADB$.
5. Доказати да су сви периферијски углови над једном тетивом круга са исте стране те тетиве међусобно једнаки.
6. На кружници су дате тачке A, B, C и D . Доказати да је $\angle ABC + \angle CDA = 180^\circ$.
7. У оштроуглом троуглу ABC угао BAC је 60° . Нека је A' средиште странице BC , а B' и C' подножја висина из темена B и C . Доказати да је троугао $A'B'C'$ једнакостранични.
8. Нека је AB тетива кружнице k . Доказати је угао одређен тетивом AB и тангентом кружнице у тачки A подударан периферијском углу над том тетивом.
9. Четвороугао око кога се може описати круг називамо тетивним. Доказати да ако је четвороугао тетивни, онда и само онда су зборови наспрамних углова четвороугла једнаки.
10. Четвороугао у који се може уписати круг називамо тангентним. Доказати да ако је четвороугао тангенти, онда и само онда су зборови наспрамних страница четвороугла једнаки.

ДОМАЋИ ЗАДАТАК

- 1) У датом кругу пречника AB дата је тетива CD која је паралелна са AB . Доказати да је у троуглу ACD разлика нека два угла једнака правом углу.
- 2) Ако се две једнаке тетиве неког круга секу, доказати да су делови једне тетиве једнаки одговарајућим деловима друге тетиве.
- 3) Збир дужина две наспрамне странице тангентног четвороугла $ABCD$ је 20cm , а полупречник уписаног круга је 4cm . Одредити површину тог четвороугла.
- 4) Ако је $ABCD$ конвексни четвороугао и углови ACB и ADB су једнаки, доказати да је $ABCD$ тетиван четвороугао.



КРОС РТС - КАМП „СОМБОР 2019“
ЛЕТЊА ШКОЛА МЛАДИХ МАТЕМАТИЧАРА
СОМБОР, 01. – 05. 07. 2019.



8. РАЗРЕД – СРЕДА 03.07.2019.

ЗОИ БИЗЕТИЋ: КОМБИНАТОРНА ГЕОМЕТРИЈА

1. Дата је раван чија је свака тачка обојена црвено или црно. Доказати да у равни постоји дуж чија је дужина 1 cm чије су крајње тачке исте боје.
2. Бела раван је на произвољан начин попрскана плавом бојом. Доказати да у равни постоји правоугли троугао чија је хипотенуза дужине 6 cm, а чија су сва темена исте боје.
3. Бела раван је на произвољан начин попрскана плавом бојом. Доказати да у плаво белој равни постоји дуж чије средиште је исте боје као и њени крајеви.
4. Бела раван је на произвољан начин попрскана плавом бојом. Доказати да у плаво белој равни постоји једнакостранични троугао чија су сва три темена исте боје.
5. Докажимо да произвољни квадрат можемо да поделимо на 2020 мањих квадрата (квадрати не морају бити међусобно подударни).
6. Дат је правоугаоник чије су странице 3 и 4 и у унутрашњој области: а) 7 тачака; б) 6 тачака изабраних на случајан начин. Докати да међу датим тачкама постоје две чије је растојање мање од $\sqrt{5}$.
7. Дато је 100 тачака у кругу полупречника 1. Доказати да постоје две тачке које се налазе на растојању не већем од $2/9$.
8. У једнакостраничном троуглу странице $a=3\text{ cm}$ на случајан начин је распоређено 10 тачака. Докажимо да при сваком распореду тачака постоје две тачке на мањем растојању од 1 cm.
9. У унутрашњој области јединичног круга дате су четири тачке. Доказати да међу њима постоје две које су на растојању мањем од $\sqrt{2}$.
10. Неке од дијагонала многоугла са 2019 страница су обојене у зелено, а остале су плаве. Доказати да постоје бар два темена из којих полазе исти број плавих дијагонала.
11. Свака тачка равни је обојена жутом, плавом или црвеном бојом. Доказати да у тој равни постоји дуж дужине 1 чије су крајње тачке исте боје.

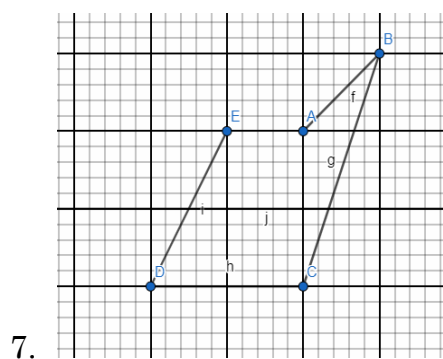
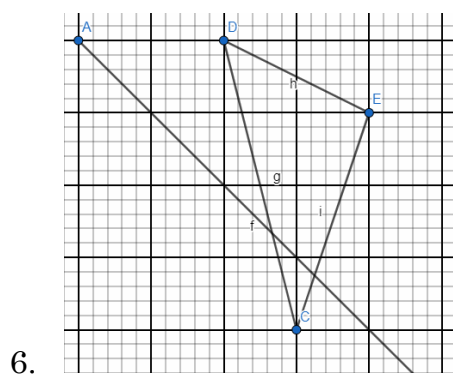
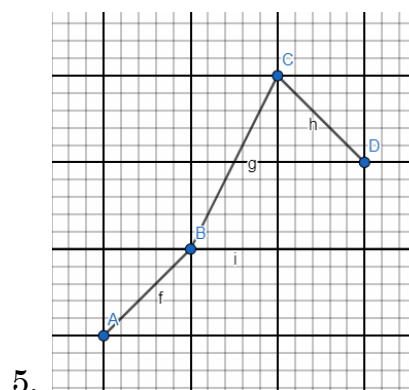
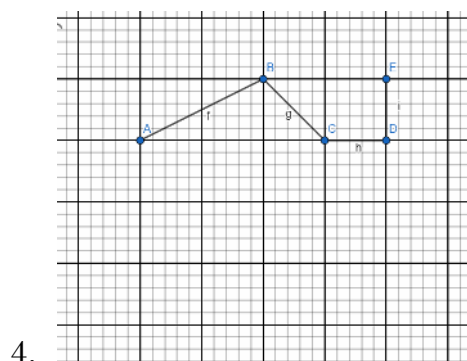
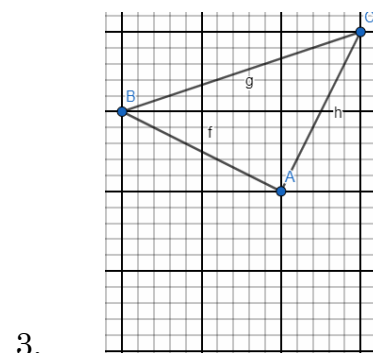
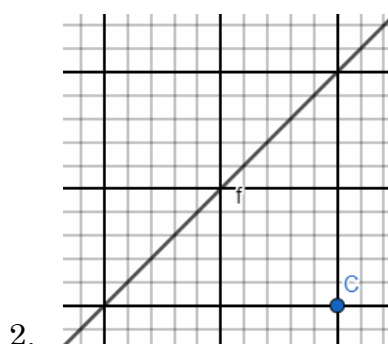
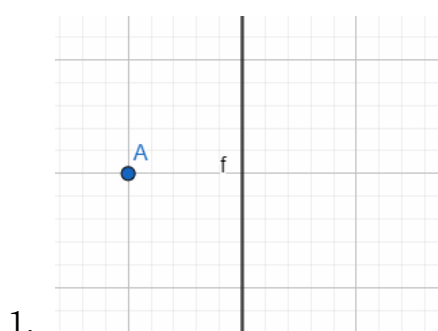
ДОМАЋИ ЗАДАТАК

- 1) Нека је n произвољан природан број већи од 5. Доказати да се сваки квадрат може поделити на n мањих квадрата (квадрати не морају бити међусобно подударни).
- 2) У квадрату странице 1 на случајан начин је распоређено 51 тачка. Доказати да постоји круг полупречника $1/7$ који садржи бар 3 дате тачке.
- 3) Странице и дијагонале конвексног шестоугла обојене су плавом или црвеном бојом. Доказати да постоји троугао чија су темена темена шестоугла и чије све странице су исте боје.

5. РАЗРЕД – ЧЕТВРТАК 04.07.2019.

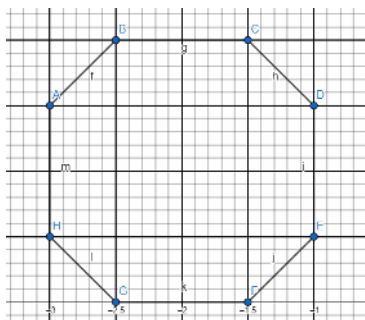
ВОЈИН ЛУКИЋ:
СИМЕТРИЈА НА КВАДРАТНОЈ МРЕЖИ

ПРЕСЛИКАЈ ДАТЕ ФИГУРЕ У ОДНОСУ НА ДАТУ ОСИ СИМЕТРИЈЕ f :

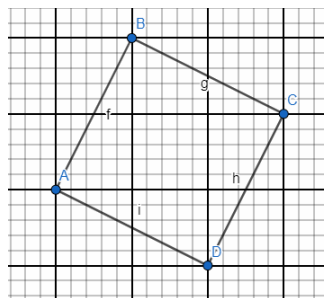


ОДРЕДИ ОСЕ СИМЕТРИЈЕ ЗА ДАТЕ ФИГУРЕ

8.



9.

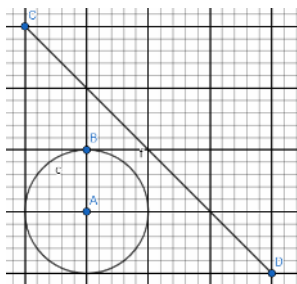


10. НАБРОЈ НЕКЕ ОСНО-СИМЕТРИЧНЕ ФИГУРЕ.

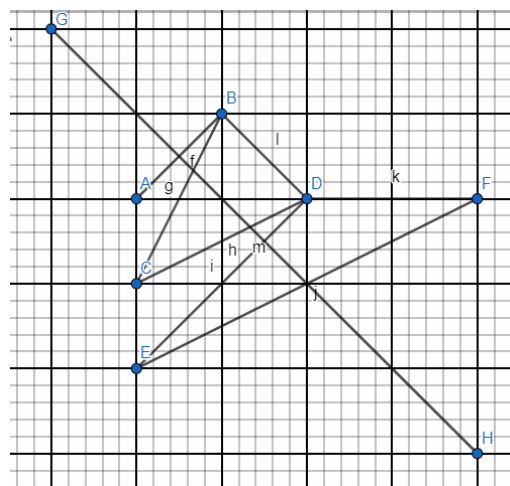
ДОМАЋИ ЗАДАТАК

1) ОСМИСЛИТИ НЕКЕ ЗАДАТКЕ КОЈИ ПРОИЗИЛАЗЕ ИЗ НАВЕДЕНЕ МАТЕРИЈЕ.

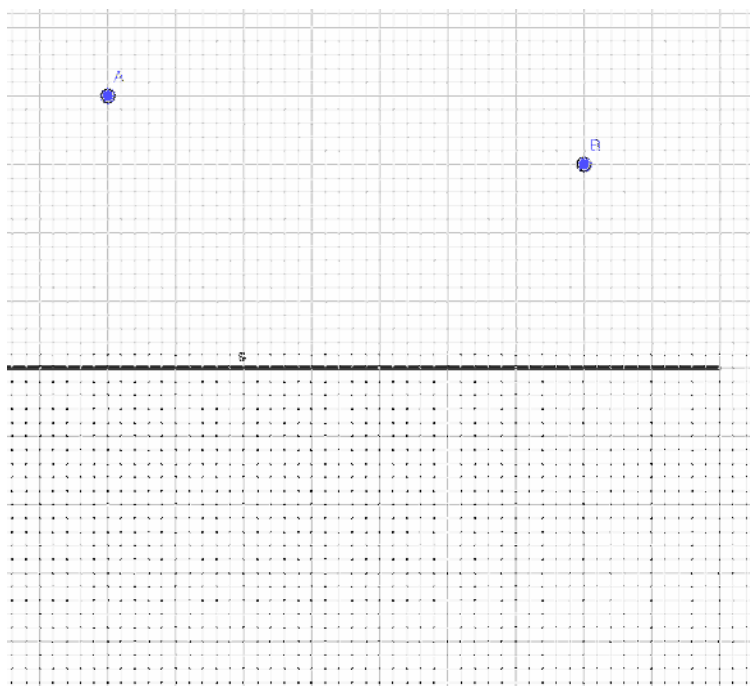
2)



3)



4) На правој s одредити тачку M тако да је растојање $AM + MB$ најкраће.





КРОС РТС - КАМП „СОМБОР 2019“
ЛЕТЊА ШКОЛА МЛАДИХ МАТЕМАТИЧАРА
СОМБОР, 01. – 05. 08. 2019.



6. РАЗРЕД – ЧЕТВРТАК 04.07.2019.

МИЛЕНА ПЕТРОВИЋ:
ДЕЉИВОСТ И ПРОСТИ БРОЈЕВИ

17. Дат је број $198x$. Одредити цифру x тако да овај број буде дељив са 66.
18. Четвороцифрени број $abcd$ је дељив са 11 ако је $a - b + c - d$ дељиво са 11. Докзати.
19. Дат је број $19581958...1958$ (сто група од четири цифре). Доказати да је број дељив са 22, а није дељив са 44.
20. Одредити природне $a, b, c, \dots, m, n, k$ бројеве тако да је
$$a + b + c + \dots + m + n + k = abc \dots mnk = 1988$$
21. Доказати да је број $7777...77777$ (300 седмица) дељив са 21, 33, 49, 231 и 451.
22. Бројеви 2 и 3 су једини пар узастопних простих природних бројева. Доказати.
23. Ако је p прост број, онда је $p+7$ сложен број. Доказати.
24. Доказати да ако је p прост број, онда су и бројеви $p^2 + 17$ и $p^3 + 17$ сложени.
25. Одредити све просте бројеве такве да су и бројеви $p + 5$ и $p + 15$ такође прости.
26. Сви прости бројеви већи од два имају облик $4k - 1$ или $4k + 1$. Докзати.
27. Доказати да сви прости бројеви већи од три имају облик $6k - 1$ или $6k + 1$. Да ли су сви бројеви облика $6k - 1$ или $6k + 1$ прости?
28. Постоји ли прост број p такав да су и бројеви $p + 14$ и $p + 38$ такође прости?
29. Одредити све просте бројеве p такве да је број $p^3 + 3^p$ такође прост број.
30. Ако су p и $8p^2 + 1$ прости бројеви, онда је $8p + 1$ сложен. Доказати.

ДОМАЋИ ЗАДАТАК

- 1) Наћи све просте бројеве p , такве да је број $p+5$ такође прост.
- 2) Сви прости бројеви већи од два имају облик $4k - 1$ или $4k + 1$. Докзати.
- 3) Дат је број $212121...212121$ (1980 јединица и исто толико двојки). Доказати да је дати број дељив са 99, а није дељив са 198.
- 4) Ако су у шестоцифреном броју прва и четврта, друга и пета, трећа и шеста цифра међусобно једнаке, онда је тај број дељив са 7, 11, 13. Доказати.



КРОС РТС - КАМП „СОМБОР 2019“
ЛЕТЊА ШКОЛА МЛАДИХ МАТЕМАТИЧАРА
СОМБОР, 01. – 05. 08. 2019.



7. РАЗРЕД – ЧЕТВРТАК 04.07.2019.

ЗОИ БИЗЕТИЋ:
КОМБИНАТОРИКА

1. На колико начина се могу 4 ученика распоредити у учионици у којој има 25 столице?
2. На једном скупу сви присутни су се међусобно руковали. Колико је било присутних ако је било 66 руковања?
3. Колико има парних троцифрених бројева између 400 и 700 тако да се цифре не понављају?
4. Колико има четвороцифрених бројева чији је збир цифара непаран?
5. Колико природних делиоца има број 2016?
6. На старту трке је 8 тркача. На колико се начина могу: а) поделити златна, сребрна и бронзана медаља б) одабрати тројица за финалну трку?
7. Колико има четвороцифрених бројева формираних од цифара 1, 2, 3, 4, 5 тако да се цифре не понављају и тако да су цифре 1 и 2 једна до друге?
8. Колико има пермутација цифара 0, 1, . . . , 9 у којима су цифре 0, 1, 2, 3 четири узастопне цифре (а) у растућем поретку; (б) у произвољном поретку?
9. Колико се од слова a, b, c може формирати речи дужине 1, 2, 3 ако се слова у једној речи: а) могу понављати б) не могу понављати? Написати све добијене речи.
10. Колико решења има једначина $a + b + c = 9$, где су a, b, c из N ? Колико решења има ако би a, b, c били из N_0 ?
11. Колико има четвороцифрених бројева, код којих је збир цифара 10, а цифра десетица једнака 5?
12. На колико различитих начина можемо распоредити 3 особе тако да седе за округлим столом? Шта се дешава у случају са 4 особе?
13. На колико различитих начина можемо распоредити 3 наставника, 3 родитеља и 3 ученика тако да међу сваке три узастопне особе постоји један наставник, један родитељ и један ученик?
14. На колико начина се могу поређати у низ бројеви 1, 2, 3, . . . , $2n$ тако да сви парни бројеви буду на парним местима?
15. На колико начина n особа могу да стану у врсту, а да при томе две уочене особе не буду једна поред друге?
16. Да ли је увек могуће између било којих 100 целих бројева изабрати 15 бројева тако да разлика било која два изабрана броја буде дељива са 7?

ДОМАЋИ ЗАДАТАК

- 1) Колико има четвороцифрених непарних бројева који су већи од 6000: а) тако да се цифре не понављају; б) тако да се цифре могу понављати?
- 2) На колико начина се на шаховску таблу може поставити 8 топова, тако да међу њима не постоје два у истој врсти или истој колони?
- 3) Дато је 7 тачака на кружници. Колико дате тачке одређу различитих: а) дужи? б) троуглова?
- 4) На полици се налазе три црвене, четири жуте и пет плавих књига (књиге су међусобно различите). На колико начина се књиге могу разместити тако да све књиге исте боје стоје једна до друге?
- 5) Колико се од слова $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ може формирати речи дужине k ако се слова у једној речи: а) могу понављати б) не могу понављати?





КРОС РТС - КАМП „СОМБОР 2019“
ЛЕТЊА ШКОЛА МЛАДИХ МАТЕМАТИЧАРА
СОМБОР, 01. – 05. 08. 2019.



8. РАЗРЕД – ЧЕТВРТАК 04.07.2019.

ЕЛЕНА СЛАДОЈЕВИЋ: КОНСТРУКТИВНИ ЗАДАЦИ

1. Конструисати центар датог круга.
2. Конструисати тетиву круга ако је дато њено средиште.
3. Конструисати ромб тако да су му а) две наспрамне странице делови две наспрамне странице датог правоугаоника; б) две суседне странице делови страница датог троугла.
4. Кроз дату тачку М конструисати праву која дели дати правоугаоник на два многоугла једнаке површине.
5. Конструисати тангенту из дате тачке на дати круг.
6. Конструисати круг ако је дат један угао и: а) ортоцентар троугла; б) центар описане кружности
7. Конструисати геометријско место тачака из којих се дуж АВ види под углом α . (што значи: одредити све тачке С такве да је $\angle ACB = \alpha$)
8. Конструисати троугао ако је дата страница, висина нормална на дату страницу и угао наспрам те странице.
9. Конструисати троугао ABC ако је дата страница АВ и углови $\angle ACB$ и $\angle BAC$.
10. Конструисати квадрат унутар троугла тако да се сва темена квадрата налазе на страницама троугла.
11. Конструисати три подударна круга у једнакостраничном троуглу тако да се свака два додирују са спољашње стране и додирују троугао са унутрашње стране.
12. Дат је троугао ABC и унутар њега тачка М. Конструисати тачке Р (припада АВ) и Q (припада BC) тако да важи: $BP = PM = MQ$

ДОМАЋИ ЗАДАТАК

- 1) Конструисати троугао ABC ако су дате странице АВ, AC и $\angle ABC$.
- 2) Конструисати тангенту на дати круг тако да је тангента нормална на дату праву.
- 3) Конструисати четвороугао који је и тетивни и тангентни.
- 4) Конструисати заједничку тангенту на два дата круга.



КРОС РТС - КАМП „СОМБОР 2019“
ЛЕТЊА ШКОЛА МЛАДИХ МАТЕМАТИЧАРА
СОМБОР, 01. – 05. 07. 2019.



5. РАЗРЕД – ПЕТАК 05.07.2019.

МИЛЕНА ПЕТРОВИЋ: КОМБИНАТОРИКА

31. Од Сомбора до Новог Сада воде четири пута, а од Новог Сада до Београда три пута. На колико начина се може из Сомбора стићи у Београд, преко Новог Сада?
32. Колико има четвороцифрених бројева чија је прва цифра паран број, друга цифра прост број, трећа цифра непаран број, а четврта сложен број?
33. На колико начина Ана, Бранка и Влада могу да стану у врсту? Колико има начина ако им се придружи и Горан?
34. Колико има троцифрених бројева који нису дељиви ни са 2, ни са 3, ни са 5?
35. На колико различитих начина три друга могу поделити 7 кликера? Узети у обзир две могућности: а) да свако мора добити бар један кликер; б) неки од другова остати без иједног кликера?
36. У равни је дато пет тачака које нису колинеарне. Да ли има више дужи са крајевима у тим тачкама или троуглова са теменима у тим тачкама?
37. На турниру у тенису учествује 2019 тенисера. Такмичење се игра по куп принципу, тј. тако да после сваког меча победник иде даље, а поражени испада. Колико треба одиграти мечева да би се добио победник турнира?
38. Колико има четвороцифрених бројева у којима се јављају само цифре 0, 3, 4, 5, 7, 9, ако цифре а) могу понављати, б) не могу понављати
39. Колико има природних бројева који су делиоци броја 2016?
40. На једној прослави руковало се свих 20 учесника међусобно. Колико је било руковања укупно?
41. Шифра се састоји од два слова ћириличне азбуке и затим две цифре. Колико има таквих различитих шифри?
42. Колико има начина да се одигра први потез у шаховској партији?
43. На колико начина могу четири особе да се поделе у парове?
44. На полици је пет различитих књига. На колико начина се могу изабрати највише три књиге?
45. Свако поље квадратне табле 3×3 треба да се обоји плавом или црвеном бојом. На колико начина је то могуће урадити?
46. Колико на шаховској табли има квадрата?
47. Колико има парних четвороцифрених бројева?

ДОМАЋИ ЗАДАТАК

- 5) Колико на шаховској табли има правоугаоника?
- 6) На колико начина могу сто особа да се поделе у парове?
- 7) Ученик има пет различитих књига. На колико начина он може да поређа књиге на полици?





КРОС РТС - КАМП „СОМБОР 2019“
ЛЕТЊА ШКОЛА МЛАДИХ МАТЕМАТИЧАРА
СОМБОР, 01. – 05. 07. 2019.



6. РАЗРЕД – ПЕТАК 05.07.2019.

ВОЈИН ЛУКИЋ:
ПОДУДАРНОСТ - ОДАБРАНИ ЗАДАЦИ

1. Ставови подударности : $ССС$, $СУС$, $УСУ$, $ССУ$, углови са нормалним и паралелним крацима.
2. Над страницом CD квадрата $ABCD$ конструисан је са спољне стране једнакостранични троугао DCE . Докажи да је $AE = BE$.
3. Да ли је тачно то да дијагонале правоугаоника деле правоугаоник на четири троугла једнаке површине?
4. У правоуглом троуглу ABC угао CBA је једнак 60° . Ако је хипотенуза $AB = 6$ колика је дужина странице CB ?
5. На основу података са цртежа докажи да су дужи AD и BE једнаке. (цртеж у прилогу)
6. На страници CD квадрата $ABCD$ дата је тачка L . Из темена A и C спуштене су нормале на праву BL и секу је, редом, у тачкама P и Q . Докажи да је $CP = DQ$.
7. На основици AB једнакокраког троугла ABC дата је тачка P . На правој CP је тачка K тако да је угао $AKP +$ угао $СКВ = 180$ степени. Докажи да је тачка P на симетрали угла код темена C .
8. Ако за троугао ABC важи $AC = BC = 12$, $\angle ACB = 150^\circ$, колико износи дужина висине AA' ?

ДОМАЋИ ЗАДАТАК

- 1) Нека је S центар круга уписаног у троугао ABC . Ако права која садржи S и паралелна је ивици BC тог троугла сече ивице AB и AC редом у тачкама M и N , доказати да је $BM + NC = NM$.
- 2) Ако је $ABCD$ правоугаоник и ако су троуглови AQB и APD једнакостранични и исто оријентисани, доказати да је дуж PQ подударна дијагонали тог правоугаоника.
- 3) Ако су P и Q средишта страница AB и AC у троуглу ABC доказати да је $2 PQ = BC$.



КРОС РТС - КАМП „СОМБОР 2019“
ЛЕТЊА ШКОЛА МЛАДИХ МАТЕМАТИЧАРА
СОМБОР, 01. – 05. 07. 2019.



7. РАЗРЕД – ПЕТАК 05.07.2019.

ЗОИ БИЗЕТИЋ:
ДЕЉИВОСТ И ПРОСТИ БРОЈЕВИ

1. Ако је $n > -5$ цео број. Доказати да је број $N = n^2 + 13n + 42$ сложен природан број.
2. Доказати да је израз $N = 3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ дељив са 10 за сваки природни број n ?
3. Одредити све целе бројеве n за које дати разломак има целобројну вредност:
а) $\frac{n^2+1}{n+1}$; б) $\frac{n^2+n-6}{n^2-3n+2}$;
4. Да ли постоји природан број n такав да једначина $5^x + 6^y + 7^z = 6666 \dots 666$ (има n шестица) има решење у скупу природних бројева, x и y су такође природни бројеви?
5. Да ли је број $1^{2000} + 2^{2000} + 3^{2000} + 4^{2000}$ дељив са 5?
6. Да ли постоји природан број n такав да једначина $1 + 2 + 3 + \dots + x + 5^y = 222 \dots 222$ (има n двојки) има решење у скупу природних бројева, x , y и z су такође природни бројеви?
7. Одредити прост број p тако да је број $2p+1$ тачан куб неког природног броја.
8. Да ли постоји природан број n , такав да је вредност полинома $p(n)=n^2+2n+1999$ квадрат неког природног броја?
9. За које природне бројеве n је вредност полинома $p(n)=n^3+3n^2-n-3$ дељива са 48?
10. Колико треба употребити цифара 5 и 2 да би број $5252 \dots$ био дељив са 99.
11. Ако је $6x + 11y$ дељиво са 31 онда је и $x + 7y$ дељиво са 31. Доказати.
12. Решити у $\mathbb{Z}$ једначину $x! + 3y = 5555$.
13. Одредити остатак при дељењу броја 2^{30} са 7.
14. Доказати да је број $n^n - n$ дељив са 24 за сваки непаран природан број.
15. Нека је $A = 4444^{4444}$. Нека је збир цифара броја A број B , збир цифара броја B број C . Одредити збир цифара броја C .

ДОМАЋИ ЗАДАТАК

- 1) Нека су m и n цели бројеви такви да $41 \mid m^2 + n^2$. Доказати да тада важи $41 \mid (4m+5n)(5m+4n)$.
- 2) Одредити све природне бројеве n за које важи: а) $120 \mid 16^{n+1} \cdot 4^{2n}$; б) $333 \mid 3^n + 3^{n+1} + 3^{n+2}$; в) $2013 \mid 7 \cdot 11^n + 5 \cdot 11^{n+1} + 11^{n+2}$;
- 3) Доказати да једначина $x^2 + 1999x + 2001 = 0$ нема целобројних решења.
- 4) Решити у $\mathbb{Z}$ једначину $x! + y! = 10z + 9$.



КРОС РТС - КАМП „СОМБОР 2019“
ЛЕТЊА ШКОЛА МЛАДИХ МАТЕМАТИЧАРА
СОМБОР, 01. – 05. 08. 2019.



8. РАЗРЕД – ПЕТАК 05.07.2019.

ЕЛЕНА СЛАДОЈЕВИЋ:
КОМБИНАТОРИКА

1. На колико начина се могу 4 ученика распоредити у учионици у којој има 25 столице?
2. На једном скупу сви присутни су се међусобно руковали. Колико је било присутних ако је било 66 руковања?
3. Колико има парних троцифрених бројева између 400 и 700 тако да се цифре не понављају?
4. Колико има четвороцифрених бројева чији је збир цифара непаран?
5. Колико природних делиоца има број 2016?
6. На старту трке је 8 тркача. На колико се начина могу: а) поделити златна, сребрна и бронзана медаља б) одабрати тројица за финалну трку?
7. Колико има четвороцифрених бројева формираних од цифара 1, 2, 3, 4, 5 тако да се цифре не понављају и тако да су цифре 1 и 2 једна до друге?
8. Колико има пермутација цифара 0, 1, . . . , 9 у којима су цифре 0, 1, 2, 3 четири узастопне цифре (а) у растућем поретку; (б) у произвољном поретку?
9. Колико се од слова a, b, c може формирати речи дужине 1, 2, 3 ако се слова у једној речи: а) могу понављати б) не могу понављати? Написати све добијене речи.
10. Колико решења има једначина $a + b + c = 9$, где су a, b, c из N ? Колико решења има ако би a, b, c били из N_0 ?
11. Колико има четвороцифрених бројева, код којих је збир цифара 10, а цифра десетица једнака 5?
12. На колико различитих начина можемо распоредити 3 особе тако да седе за округлим столом? Шта се дешава у случају са 4 особе?
13. На колико различитих начина можемо распоредити 3 наставника, 3 родитеља и 3 ученика тако да међу сваке три узастопне особе постоји један наставник, један родитељ и један ученик?
14. На колико начина се могу поређати у низ бројеви 1, 2, 3, . . . , $2n$ тако да сви парни бројеви буду на парним местима?
15. На колико начина n особа могу да стану у врсту, а да при томе две уочене особе не буду једна поред друге?
16. Да ли је увек могуће између било којих 100 целих бројева изабрати 15 бројева тако да разлика било која два изабрана броја буде дељива са 7?

ДОМАЋИ ЗАДАТАК

- 1) Колико има четвороцифрених непарних бројева који су већи од 6000: а) тако да се цифре не понављају; б) тако да се цифре могу понављати?
- 2) На колико начина се на шаховску таблу може поставити 8 топова, тако да међу њима не постоје два у истој врсти или истој колони?
- 3) Дато је 7 тачака на кружници. Колико дате тачке одређу различитих: а) дужи? б) троуглова?
- 4) На полици се налазе три црвене, четири жуте и пет плавих књига (књиге су међусобно различите). На колико начина се књиге могу разместити тако да све књиге исте боје стоје једна до друге?
- 5) Колико се од слова $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ може формирати речи дужине k ако се слова у једној речи: а) могу понављати б) не могу понављати?





МАТЕМАТИЧКА РАДИОНИЦА 2:

ВОЈИСЛАВ АНДРИЋ

ПАЛИНДРОМИ

ТЕМА 1: РАЧУНСКЕ ОПЕРАЦИЈЕ СА ПАЛИНДРОМИМА

У свакодневном животу често се сусрећу речи или реченице које се читају с лева у десно исто као и с десна у лево (ања, ана воли милована, музика је јак изум ...). Таквих примера има и међу бројевима (5, 77, 111, 2442, 5678765 ...). Речи, реченице, бројеви ... који се једнако читају с лева у десно као и с десна у лево називају се *палиндроми*.

Ми ћемо у данашњем раду бројевним палиндромима, (скраћено – палиндромима) звати природне бројеве који имају облик А, АА, АВА, АВВА, АВСВА, АВССВА ... при чему цифре А, В, С ... могу (али не морају бити различите). То значи и да прва цифра, а самим тим и последња цифра, у палиндрому никада није нула.

ПРОБЛЕМИ ЗА ИСТРАЖИВАЊЕ:

1. Да ли постоји сабирање $** + *** = ****$ у коме су и сабирци и збир палиндром?
2. Колико таквих сабирања је могуће?
3. Може ли збир три и више палиндрома бити палиндром?
4. Да ли постоји одузимање $***** - **** = ***$ у коме су умањеник, умањилац и разлика палиндром?
5. Колико таквих одузимања је могуће?
6. Постоји ли множење $** \cdot *** = ****$ у коме су и чиниоци и производ палиндром?
7. Колико таквих множења је могуће?
8. Може ли производ три и више палиндрома бити палиндром?
9. Постоји ли дељење у коме су дељеник, делилац и количник палиндром?
10. Колико таквих дељења је могуће?
11. Да ли је могуће да се кореновањем неког палиндрома добије палиндром?
12. Напиши неколико “тешких” задатака који проистичу из истраживане материје.



МАТЕМАТИЧКА РАДИОНИЦА 2:

ВОЈИСЛАВ АНДРИЋ

ПАЛИНДРОМИ

ТЕМА 2: КОЛИКО ИМА ПАЛИНДРОМА?

У свакодневном животу често се сусрећу речи или реченице које се читају с лева у десно исто као и с десна у лево (ања, ана воли милована, музика је јак изум ...). Таквих примера има и међу бројевима (5, 77, 111, 2442, 5678765 ...). Речи, реченице, бројеви ... који се једнако читају с лева у десно као и с десна у лево називају се *палиндроми*.

Ми ћемо у данашњем раду бројевним палиндромима, (скраћено – палиндромима) звати природне бројеве који имају облик А, АА, АВА, АВВА, АВСВА, АВССВА ... при чему цифре А, В, С ... могу (али не морају бити различите). То значи и да прва цифра, а самим тим и последња цифра, у палиндрому никада није нула.

ПРОБЛЕМИ ЗА ИСТРАЖИВАЊЕ:

1. Да ли је више палиндрома облика 7A7 или A7A?
2. Колико има а) једноцифрених; б) двоцифрених; в) троцифрених; г) четвороцифрених палиндрома?
3. Колико има природних бојева – палиндрома који су мањи од 500?
4. Колико четвороцифрених палиндрома се завршава цифром 3?
5. Колико петоцифрених палиндрома почиње цифром 8?
6. Да ли међу шестоцифреним палиндромима има више парних или непарних бројева?
7. Колико има седмоцифрених палиндрома чији је производ цифара паран?
8. Да ли је више палиндрома који имају $2n$ цифара или палиндрома који имају $(2n - 1)$ цифру?
9. Колико има потпуних квадрата међу троцифреним палиндромима?
10. Напиши неколико “тешких” задатака који проистичу из истраживане материје.



МАТЕМАТИЧКА РАДИОНИЦА 2:

ВОЈИСЛАВ АНДРИЋ

ПАЛИНДРОМИ

ТЕМА 3: ПАЛИНДРОМИ И СТЕПЕНОВАЊЕ

У свакодневном животу често се сусрећу речи или реченице које се читају с лева у десно исто као и с десна у лево (ања, ана воли милована, музика је јак изум ...). Таквих примера има и међу бројевима (5, 77, 111, 2442, 5678765 ...). Речи, реченице, бројеви ... који се једнако читају с лева у десно као и с десна у лево називају се *палиндромима*.

Ми ћемо у данашњем раду бројевним палиндромима, (скраћено – палиндромима) звати природне бројеве који имају облик А, АА, АВА, АВВА, АВСВА, АВССВА ... при чему цифре А, В, С ... могу (али не морају бити различите). То значи и да прва цифра, а самим тим и последња цифра, у палиндрому никада није нула.

ПРОБЛЕМИ ЗА ИСТРАЖИВАЊЕ:

1. Постоје ли палиндроми који су потпуни квадрати?
2. Постоје ли палиндроми x и y такви да је $x^3 = y$?
3. Постоји ли природан број n такав, да су бројеви n , n^2 и n^4 палиндроми?
4. Постоји ли природан број m такав, да су бројеви m , m^2 , m^3 , m^4 палиндроми?
5. Да ли је број палиндрома који су потпуни квадрати коначан или бесконачан?
6. Постоји ли Питагорина тројка бројева таква да су сви елементи Питагорине тројке палиндроми?
7. Да ли је број Питагориних тројки чији су сви елементи палиндроми коначан или бесконачан?
8. Нека су x , y и z палиндроми. Колико решења у скупу свих палиндрома има једначина $x \cdot y = z$?
9. Напиши неколико “тешких” задатака који проистичу из истраживане материје



МАТЕМАТИЧКА РАДИОНИЦА 2:

ВОЈИСЛАВ АНДРИЋ

ПАЛИНДРОМИ

ТЕМА 4: ПАЛИНДРОМИ И ДЕЉИВОСТ?

У свакодневном животу често се сусрећу речи или реченице које се читају с лева у десно исто као и с десна у лево (ања, ана воли милована, музика је јак изум ...). Таквих примера има и међу бројевима (5, 77, 111, 2442, 5678765 ...). Речи, реченице, бројеви ... који се једнако читају с лева у десно као и с десна у лево називају се *палиндроми*.

Ми ћемо у данашњем раду бројевним палиндромима, (скраћено – палиндромима) звати природне бројеве који имају облик А, АА, АВА, АВВА, АВСВА, АВССВА ... при чему цифре А, В, С ... могу (али не морају бити различите). То значи и да прва цифра, а самим тим и последња цифра, у палиндрому никада није нула.

ПРОБЛЕМИ ЗА ИСТРАЖИВАЊЕ:

1. Колико има петоцифрених палиндрома који су дељиви са 5?
2. Колико има четвороцифрених палиндрома који су дељиви са 6?
3. Постоји ли палиндром чије су све цифре једнаке који је дељив са 7?
4. Колико има таквих палиндрома?
5. Колико има палиндрома који су дељиви са 10?
6. Колико има троцифрених палиндрома који су дељиви са 11?
7. Доказати да су сви палиндроми који имају паран број цифара дељиви са 11.
8. Колико има седмоцифрених палиндрома који су дељиви са 25?
9. Да ли је палиндрома који су дељиви са 35 коначано или бесконачно много?
10. Који је најмањи, а који највећи троцифрен прост број, који је истовремено и палиндром?
11. Да ли је број петоцифрених палиндрома који су дељиви са 41 мањи, већи или једнак 5?
12. Напиши неколико “тешких” задатака који проистичу из истраживане материје.



МАТЕМАТИЧКА РАДИОНИЦА 2:

ВОЈИСЛАВ АНДРИЋ

ПАЛИНДРОМИ

ТЕМА 5: БИНАРНИ И ДЕКАДНИ ПАЛИНДРОМИ?

У свакодневном животу често се сусрећу речи или реченице које се читају с лева у десно исто као и с десна у лево (ања, ана воли милована, музика је јак изум ...). Таквих примера има и међу бројевима (5, 77, 111, 2442, 5678765 ...). Речи, реченице, бројеви ... који се једнако читају с лева у десно као и с десна у лево називају се *палиндроми*.

Ми ћемо у данашњем раду бројевним палиндромима, (скраћено – палиндромима) звати природне бројеве који имају облик А, АА, АВА, АВВА, АВСВА, АВССВА ... при чему цифре А, В, С ... могу (али не морају бити различите). То значи и да прва цифра, а самим тим и последња цифра, у палиндрому никада није нула.

ПРОБЛЕМИ ЗА ИСТРАЖИВАЊЕ:

1. Да ли постоје бинарни палиндоми који су истовремено и декадни?
2. Колико има двоцифрених декадних палиндома који су истовремено и бинарни палиндоми?
3. Да ли међу декадним природним бројевима мањим од 100, има више бројева који су палиндроми у декадном или оних који су палиндоми у бинарном систему?
4. Природан бој n је осмоцифрен бинарни број. Ако се n напише у декадном запису добија се палиндром. Која је најмања, а која највећа вредност n ?
5. Природан бој n је четвороцифрен. Ако се n напише у бинарном систему добија се палиндром. Која је најмања вредност n ?
6. Природан бој n је четвороцифрен. Ако се n напише у бинарном систему добија се палиндром. Која је највећа вредност n ?
7. Колико има парних бинарних палиндрома?
8. Да ли је више бинарних или декадних палиндрома?
9. Напиши неколико “тешких” задатака који проистичу из истраживане материје.

